2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 実数 x に対し

$$a_n(x) = \left(\frac{-x^2+8x-19}{x^2-6x+5}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．ただし x は1でも5でもないとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ が収束する x の範囲と，そのときの極限値を求めよ．

(2) $\int_2^3 a_1(x)\,dx$ を求めよ．

(1) $-1 < a_n(x) \leqq 1$ のとき収束するので

$$-1 < \frac{-x^2+8x-19}{x^2-6x+5} \leqq 1$$

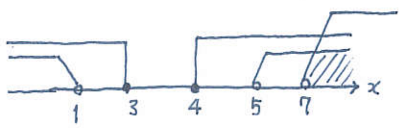
(i) $x^2-6x+5>0$ すなわち $x<1$ または $x>5$ のとき.

$$-x^2+6x-5 < -x^2+8x-19 \leqq x^2-6x+5$$

左の不等号より, $2x > 14$ $\therefore x>7$

右の不等号より, $2x^2-14x+24 \geqq 0$ $\therefore (x-3)(x-4) \geqq 0$ $\therefore x \leqq 3$ または $x \geqq 4$

以上を同時にみたすのは. $x>7$



(ii) $x^2-6x+5<0$ すなわち $1<x<5$ のとき.

$$x^2-6x+5 \leqq -x^2+8x-19 < -x^2+6x-5$$

左の不等号より. $2x^2-14x+24 \leqq 0$ $(x-3)(x-4) \leqq 0$ $\therefore 3 \leqq x \leqq 4$

右の不等号より. $2x < 14$ $\therefore x<7$

以上を同時にみたすのは. $3 \leqq x \leqq 4$

(i),(ii) より. $\underline{収束する x の範囲は, 3 \leqq x \leqq 4,\ x>7}$ //

$\underline{極限値は \begin{cases} 0 & (3<x<4,\ x>7 のとき) \\ 1 & (x=3, 4 のとき) \end{cases}}$ //

(2) (与式) $= \displaystyle\int_2^3 \frac{-x^2+8x-19}{x^2-6x+5}\,dx$

$$= \int_2^3 -1 + \frac{(x^2-6x+5)'}{x^2-6x+5} - \frac{8}{x^2-6x+5}\,dx$$

$$= \int_2^3 -1 + \frac{(x^2-6x+5)'}{x^2-6x+5} - 2\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \Big[-x + \log|x^2-6x+5| - 2\big(\log|x-5| - \log|x-1|\big)\Big]_2^3$$

$$= -3 + \log 4 - 2(\log 2 - \log 2) + 2 - \log 3$$
$$+ 2(\log 3 - \log 1)$$

$$\underline{= -1 + 2\log 2 + \log 3} \quad //$$