三重大学

2016年 医学部 第3問

3 以下の a, b, c はいずれも正の実数とする.

(1) 「ab が有理数ならば, $(a+b)^2$ は有理数である」という主張が正しければ証明し, 誤りならば反例を与えよ.

(2) ab, ac, bc が有理数ならば, a^2 は有理数であることを示し, さらに $(a+b+c)^2$ は有理数であることを示せ.

(3) ab, ac, bc が有理数で, さらに $(a+b+c)^3$ が有理数となるならば, a, b, c はそれぞれ有理数であることを示せ.

(1) 主張は誤りで, 反例は $a=2^{\frac{1}{4}}$, $b=2^{\frac{3}{4}}$

このとき, $ab=2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}=1$ (有理数), $(a+b)^2=\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}$ (無理数)

となり, 主張は成り立たない.

(2) $bc>0$ であるから,

$a^2=\dfrac{ab\cdot ac}{bc}$ であり, ab, bc, ac はすべて有理数より, a^2 は有理数である.

同様にして, b^2, c^2 も有理数となるので,

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

は有理数の和として表せるので, $(a+b+c)^2$ は有理数である ▨

(3) まず, a が有理数であることを示す.

$a>0, b>0, c>0$ より, $(a+b+c)^2>0$ である.

$\therefore\ a+b+c=\dfrac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}$ であり, (2)より $(a+b+c)^2$ は有理数であるから

$(a+b+c)^3$ が有理数ならば $a+b+c=p$ (有理数) となる.

両辺に a をかけて, $a^2+ab+ac=ap$

$p>0$ であるから, $a=\dfrac{a^2+ab+ac}{p}$

ここで, a^2, ab, ac, p はすべて有理数より, a は有理数

同様にして, b, c も有理数である.

以上より, 題意は示された ▨