2014年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $n$を自然数とする．5832を底とする$n$の対数$\log_{5832} n$が有理数であり$\frac{1}{2} < \log_{5832} n < 1$を満たすとき，$n$を求めよ．

$5832 = 2^3 \cdot 3^6$

$\log_{5832} n = \frac{q}{p}$ （$p, q$は互いに素な正の整数）とおく．

$\therefore n = (2^3 \cdot 3^6)^{\frac{q}{p}} \iff n^p = 2^{3q} \cdot 3^{6q} \cdots (*)$

$\therefore n = 2^x \cdot 3^y$ と表せる（$x, y$は正の整数）

$(*)$に代入して．$2^{px} \cdot 3^{py} = 2^{3q} \cdot 3^{6q}$

~~2と3は互いに素なので~~，素因数分解の一意性より． $px = 3q$，$py = 6q \cdots (**)$

$p, q$は互いに素なので，$x = qx'$，$y = qy'$ と表せる（$x', y'$は正の整数）

$(**)$に代入して．$pqx' = 3q$，$pqy' = 6q$

$\therefore px' = 3$，$py' = 6$

ここで，$p = 1$と仮定すると．$\log_{5832} n = q \geqq 1$となり．

$\frac{1}{2} < \log_{5832} n < 1$ を満たさない

$\therefore p = 3$，$x' = 1$，$y' = 2$　このとき．$x = qx' = q$，$y = 2q$

$\frac{1}{2} < \log_{5832} n$ より．$2\sqrt{2} \cdot 3^3 < 2^q \cdot 3^{2q}$　$\therefore q = 2$

$\therefore n = (2^3 \cdot 3^6)^{\frac{2}{3}} = 2^2 \cdot 3^4 = \underline{324}$ //