

2016年理系第1問

1枚目/2枚



1 座標空間に4点

 $O(0, 0, 0), A(s, s, s), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1)$ 

がある。ただし、 $s > 0$ とする。 $t, u, v$ を実数とし、

$$\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}, \quad \vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$  のとき、 $t$ を $s$ を用いて表せ。
- (2)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{OA} \perp \vec{e}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{e}$  のとき、 $u, v$ を $s$ を用いて表せ。
- (3) (2)のとき、2点D, Eを

$$\vec{OD} = \vec{d}, \quad \vec{OE} = \vec{e}$$

となる点とする。四面体OADEの体積が2であるとき、 $s$ の値を求めよ。

- (1)  $\vec{OA} = (s, s, s)$ ,  $\vec{d} = (-1-st, 1-st, 1-st)$  は  $\vec{0}$  ではないから

$$\vec{OA} \perp \vec{d} \text{ より, } \vec{OA} \cdot \vec{d} = 0 \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OA} \cdot \vec{d} &= -s - s^2t + s - s^2t + s - s^2t \\ &= s(1 - 3st) \end{aligned}$$

$$\therefore s > 0 \text{ より } 1 - 3st = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3s} //$$

- (2)  $\vec{e} = (-su+v, -su-v, 1-su-v)$  は  $\vec{0}$  ではないから、 $\vec{OA} \cdot \vec{e} = 0$  となる

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OA} \cdot \vec{e} &= -s^2u + sv - s^2u - sv + s - s^2u - sv \\ &= s(-3su - v + 1) \end{aligned}$$

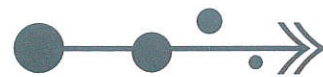
$$\therefore s > 0 \text{ より, } -3su - v + 1 = 0 \quad \therefore 3su + v = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{d} \perp \vec{e} \text{ より, } \vec{d} \cdot \vec{e} = 0 \text{ である. } \therefore t = \frac{1}{3s} \text{ より, } \vec{d} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{d} \cdot \vec{e} &= -\frac{4}{3}(-su+v) + \frac{2}{3}(-su-v) + \frac{2}{3}(1-su-v) \\ &= -\frac{8}{3}v + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{8}{3}(v - \frac{1}{4}) = 0 \quad \therefore v = \frac{1}{4} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \underline{u = \frac{1}{4s}, v = \frac{1}{4}} //$$



2016年理系第1問

2枚目 / 2枚



1 座標空間に4点

$$O(0, 0, 0), \quad A(s, s, s), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(0, 0, 1)$$

がある。ただし、 $s > 0$ とする。 $t, u, v$ を実数とし、

$$\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}, \quad \vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$  のとき、 $t$ を $s$ を用いて表せ。
- (2)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{OA} \perp \vec{e}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{e}$  のとき、 $u, v$ を $s$ を用いて表せ。
- (3) (2)のとき、2点D, Eを

$$\vec{OD} = \vec{d}, \quad \vec{OE} = \vec{e}$$

となる点とする。四面体OADEの体積が2であるとき、 $s$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned} (3) V &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA}| \cdot |\vec{d}| \cdot |\vec{e}| \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3}s \cdot |\vec{d}| \cdot |\vec{e}| \end{aligned}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\vec{e} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ より } |\vec{e}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3}s \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{s}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore V = 2 \text{ より, } \underline{s = 6} \quad \leftarrow s > 0 \text{ をみたす}$$