兵庫県立大学

2014年 経済・経営 第5問

5 三辺の長さ x, y, z がすべて自然数であり，$x+y+z=100$，$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ を満たす三角形について考える．ただし，合同な三角形は同一視して考える．次の問に答えなさい．

(1) 最大辺の長さ z の取り得る値の範囲を求めなさい．

(2) 与えられた条件を満たす三角形のうち，最大辺の長さが45の三角形は何個あるか．

(3) 与えられた条件を満たす三角形は全部で何個あるか．

(1) $x+y+z \leqq 3z$ なので．$z \geqq \frac{100}{3}$　z は自然数より $z \geqq 34$ …①

また，三角形の成立条件より，$x+y>z$

$x+y=100-z$ を代入して，$100-z>z$ ∴ $z<50$ …②

①，②より $\underline{34 \leqq z \leqq 49}$ //

(2) $z=45$ のとき，$x+y=55$，$1 \leqq x \leqq y \leqq 45$

∴ $(x, y)=(10, 45), (11, 44), \cdots, (27, 28)$ の $\underline{18\text{個}}$ //

(3) $z=k$ $(34 \leqq k \leqq 49)$ とする

$x+y=100-k$，$1 \leqq x \leqq y \leqq k$ をみたす (x, y) は

(i) $k=2m$ (m：整数) のとき．

$(x, y)=(100-2k, k), (101-2k, k-1), \cdots, \left(50-\frac{k}{2}, 50-\frac{k}{2}\right)$

個数は $50-\frac{k}{2}-(100-2k)+1=\frac{3}{2}k-49$ 個 $=3m-49$ 個

(ii) $k=2m+1$ (m：整数) のとき

$(x, y)=(100-2k, k), (101-2k, k-1), \cdots, \left(\frac{99}{2}-\frac{k}{2}, \frac{101}{2}-\frac{k}{2}\right)$

個数は $\frac{99}{2}-\frac{k}{2}-(100-2k)+1=\frac{3}{2}k-\frac{99}{2}$ 個 $=3m-48$ 個

(i)，(ii)より．求める個数を S とおくと．

$$S=\sum_{m=17}^{24}(3m-49)+\sum_{m=17}^{24}(3m-48)=\sum_{m=17}^{24}(6m-97)=\frac{8}{2}\cdot(6\cdot17-97+6\cdot24-97)$$

$=\underline{208\text{個}}$ //