香川大学

2015年 教育学部・農学部 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) nが自然数のとき，数学的帰納法を用いて $\sqrt{2} < a_n$ を示せ．

(2) nが自然数のとき，$a_{n+1} < a_n$ を示せ．

(3) nが自然数のとき，数学的帰納法を用いて

$$a_n - \sqrt{2} \leqq \frac{(2-\sqrt{2})^n}{3^{n-1}}$$

を示せ．

(1) (i) $n=1$ のとき

$a_1 = 2 > \sqrt{2}$ ∴成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つとすると,

$a_k > \sqrt{2}$ …①

このとき, $a_{k+1} = \dfrac{2a_k+2}{a_k+2}$

$$= \frac{2(a_k+2)-2}{a_k+2}$$

$$= 2 - \frac{2}{a_k+2}$$

$$> 2 - \frac{2}{\sqrt{2}+2} \quad (\because ①より)$$

$$= 2 - \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}$$

∴ $n=k+1$ のとき成り立つ

(i), (ii)より, nが自然数のとき, $a_n > \sqrt{2}$ が成り立つ ▨

(2) $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{2a_n+2}{a_n+2}$

$$= \frac{a_n^2 + 2a_n - 2a_n - 2}{a_n+2}$$

$$= \frac{(a_n+\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2})}{a_n+2}$$

> 0 （$\because a_n > \sqrt{2}$ より）

∴ $a_n > a_{n+1}$ が成り立つ ▨

香川大学

2015年 教育学部・農学部 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて $\sqrt{2} < a_n$ を示せ．
(2) n が自然数のとき，$a_{n+1} < a_n$ を示せ．
(3) n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて

$$a_n - \sqrt{2} \leqq \frac{(2-\sqrt{2})^n}{3^{n-1}}$$

を示せ．

(3) (i) $n=1$ のとき.

(左辺) $= a_1 - \sqrt{2} = 2-\sqrt{2}$, (右辺) $= 2-\sqrt{2}$ となり 成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると,

$$a_k - \sqrt{2} \leqq \frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}} \quad \cdots ②$$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{2a_k + 2 - \sqrt{2}(a_k+2)}{a_k+2} \\
&= \frac{(2-\sqrt{2})(a_k-\sqrt{2})}{a_k+2} \\
&\leqq \frac{2-\sqrt{2}}{1+2} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^k}{3^{k-1}} \quad (\because a_n > 1 \text{ と ② より}) \\
&= \frac{(2-\sqrt{2})^{k+1}}{3^k}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $n = k+1$ のとき成り立つ

(i), (ii) より, 与えられた不等式は成り立つ ▨