0000324815769999

県立広島大学

2012年第3問

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - \log_5 2^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $5^{a_n} < 10^{-14}$ を満たす最小の n を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $a_{n+1} - a_n = -n\log_5 2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

よって，$n \geqq 2$ のとき．

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-k\log_5 2)$$

$$= 1 - \log_5 2 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\log_5 2)n(n-1)$$

これは．$n=1$ のとき．$a_1 = 1$ をみたす．よって．

$$\underline{a_n = 1 - \frac{1}{2}(\log_5 2)\cdot n(n-1) \quad (n=1,2,3,\cdots)}$$ //

(2) $5^{a_n} < 10^{-14} \iff a_n < -14\log_5 10$

$$\iff 1 - \frac{1}{2}(\log_5 2)\cdot n(n-1) < -14\log_5 10$$

$$\iff 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}\cdot n(n-1) < -14\cdot\frac{1}{\log_{10} 5}$$

$$\iff \log_{10} 5 - \frac{1}{2}\log_{10} 2\cdot n(n-1) < -14$$

$$\iff 1 - \log_{10} 2 - \frac{1}{2}\log_{10} 2\cdot n(n-1) < -14$$

$$\iff n(n-1) > \frac{15 - \log_{10} 2}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} = \frac{30}{\log_{10} 2} - 2 \fallingdotseq 97.67$$

∴ 最小の n は．$\underline{n = 11}$ //