

2015年薬学部第3問

3 ビーカー A に濃度 10% の食塩水 400 g が入っている。

操作 「ビーカー A の食塩水 100 g を取り除き、濃度 5% の食塩水 100 g をビーカー A に加えてよくかき混ぜる」を考える。

この操作を n 回続けて行ったときのビーカー A の食塩水の濃度を $a_n\%$ とする。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ とする。

- (1) a_1 を求めると、 $a_1 = \boxed{\text{キ}}$ である。 $\frac{35}{4}a_n + \frac{5}{4}$
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表すと、 $a_{n+1} = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (3) a_n を n の式で表すと、 $a_n = \boxed{\text{ケ}}$ である。 $5\{1 + (\frac{3}{4})^n\}$
- (4) ビーカー A の食塩水の濃度がはじめて 5.001% 以下となる n を求めると、 $n = \boxed{\text{コ}}$ である。
30

(1) はじめビーカー A に食塩は $400 \times 0.1 = 40$ g 溶けている。

1 回目の操作で、 $40 - 100 \times 0.1 + 100 \times 0.05 = 35$ g になる。

$$\therefore \text{濃度は } \frac{35}{400} \times 100 = \frac{35}{4} \quad \therefore a_1 = \frac{35}{4}$$

$$(2) \frac{\frac{a_n}{100} \times 400 - 100 \times \frac{a_n}{100} + 100 \times \frac{5}{100}}{400} \times 100 = a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{4}(4a_n - a_n + 5)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{5}{4}$$

$$(3) a_{n+1} - 5 = \frac{3}{4}(a_n - 5)$$

\therefore 数列 $\{a_n - 5\}$ は初項 $a_1 - 5 = \frac{15}{4}$ 、公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列

$$\therefore a_n - 5 = \frac{15}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 5 + 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore a_n = 5 \left\{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

$$(4) 5 \left\{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} \leq 5.001 \quad \text{より} \quad 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0.001$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 2 \times 10^{-4} \quad \Leftrightarrow n(\log_{10} 3 - 2 \log_{10} 2) \leq \log_{10} 2 - 4$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{0.301 - 4}{0.477 - 2 \times 0.301}$$

$$= 29.592$$

$$\therefore n = \underline{\underline{30}}$$