高知工科大学

2011 年 第 3 問

$\boxed{3}$ 0 以上の整数 n に対して

$$a_n = \int_0^1 e^{-x} x^n \, dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく．ここで e は自然対数の底である．次の各問に答えよ．

(1) a_0 と a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 等式

$$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) 次式が成り立つことを証明せよ．

1 $0 \leqq a_n \leqq a_0$　　2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$