

2018年工学部・情報工学部 第3問

3 平面 α 上の $\triangle OAB$ に対して、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = t$ 、 $\angle AOB = \theta$ とする。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。また、 $\triangle OAB$ の面積を S とする。次に答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 4\sqrt{3}S$ を t 、 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ を用いて表せ。
 (2) t を固定したとき、(1) で求めた式を $f(\theta)$ とする。 $f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ。また、その最小値をとるときの θ の値を求めよ。

設問 (3)、(4) では、点 P が平面 α 上を動くものとし、 $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ とする。

- (3) t および θ を固定したとき、 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$ の最小値を t 、 $\cos\theta$ を用いて表せ。また、その最小値をとるときの \vec{x} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
 (4) t 、 θ および \vec{x} によらず、 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ。また、この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ。