2015年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c は正の実数で，$a \neq 1$, $c \neq 1$ とするとき，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ となることを，対数の定義にもとづいて証明せよ．ただし，必要ならば，$\log_p M^r = r \log_p M$（$p > 0$, $p \neq 1$, $M > 0$, r は実数）を用いてよい．

(2) 方程式 $\log_4(x+3) = \log_2 x - 1$ を解け．

(3) 方程式 $\log_4(x+k) = \log_2 x - 1$ が解を持つような実数 k の範囲を求めよ．

(1) $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ を示せばよい

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b}$

$= \log_c b$ ■

(2) 真数条件より，$x+3>0$ かつ $x>0$　　$\therefore x>0 \cdots ①$

このとき (1) より，

$\dfrac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} = \log_2 x - 1$

$\therefore \log_2 \dfrac{x+3}{x^2} = -2$

$\therefore \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{1}{4} \iff x^2 - 4x - 12 = 0$

$\therefore (x-6)(x+2) = 0$　　① より $\underline{x = 6}$ //

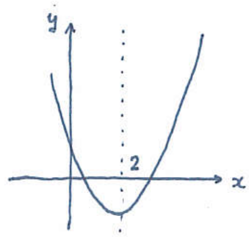
(3) (2) と同様にして，真数条件は，$x+k>0$ かつ $x>0$ $\cdots ②$

$x^2 - 4x - 4k = 0 \cdots ③$

$\therefore x + k = \dfrac{x^2}{4}$ なので ② は $x>0$ となる．

③ が $x>0$ となる実数解をもてばよい．

軸が $x=2$ なので $D \geqq 0$ となればよい



$\therefore D/4 = 2^2 - (-4k) \geqq 0$

$\therefore \underline{k \geqq -1}$ //