



2012年工学部第4問

4 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $y = x - e^{-x}$  の増減を調べよ。
- (2) 実数  $\alpha$  で  $\alpha - e^{-\alpha} = 0$  を満たすものがひとつだけ存在することを示せ。さらに、この  $\alpha$  は、 $0 < \alpha < 1$  を満たすことを示せ。
- (3) (2) の  $\alpha$  と正の整数  $n$  に対して、

$$I_n = \int_0^{\alpha} (xe^{-nx} + \alpha x^{n-1}) dx$$

とおく。  $I_n$  を  $\alpha$  の多項式として表せ。また、  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n$  を求めよ。