



2012年工学部第4問

4 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = x - e^{-x}$ の増減を調べよ。
- (2) 実数 α で $\alpha - e^{-\alpha} = 0$ を満たすものがひとつだけ存在することを示せ。さらに、この α は、 $0 < \alpha < 1$ を満たすことを示せ。
- (3) (2) の α と正の整数 n に対して、

$$I_n = \int_0^{\alpha} (xe^{-nx} + \alpha x^{n-1}) dx$$

とおく。 I_n を α の多項式として表せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n$ を求めよ。