2012年 医学部 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad(x>0)$$

メモ
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を求めよ．

(2) 極限 $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ の値を求め，さらに $f'(x)<0$ であることを証明せよ．

(3) 関数 $y=f(x)$ の凹凸と漸近線を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(1) 合成関数の微分より，

$$f'(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)'\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2\cdot 2x(x+1)-(2x+1)(4x+2)}{4x^2(x+1)^2}$$

$$=\underline{\frac{1}{2x^2(x+1)^2}}\ //$$

(2) (1)より，

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}-\underbrace{\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}_{\to 0}\right\}=\underline{0}\ //$$

また，$f''(x)=\dfrac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$ より，$f'(x)$ は $x>0$ で単調増加の関数である．

x	(0)	$\cdots$	$(+\infty)$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	(0)

$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ より，$f'(x)<0$ となる ▨

(3) $f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を使った

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{\to e}+\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\to 1}\right\}$$

$$=1$$

また，$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$ より，漸近線は，y軸と $y=1$

2枚目につづく

0000561368349999

島根大学

2012年 医学部 第3問　2枚目／2枚

3 関数

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad (x>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を求めよ．

(2) 極限 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ の値を求め，さらに $f'(x)<0$ であることを証明せよ．

(3) 関数 $y=f(x)$ の凹凸と漸近線を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(3) のつづき．

∴増減表は右のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$(+\infty)$	↘	(1)

∴ グラフは次のようになる