早稲田大学

2010年 スポーツ科学学部 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 自然数nが$n=p^2q$（p，qは素数，$p \neq q$）の形で表されるとき，nの正の約数は6個あり，それらの和は

$$(\boxed{\text{ク}}+p+p^2)(\boxed{\text{ケ}}+q)$$

と表すことができる．このようなnで正の約数の和が$2n$となるような数を求める．正の約数の和が$2n$であるから，

$$2p^2q=(\boxed{\text{ク}}+p+p^2)(\boxed{\text{ケ}}+q)$$

が成り立つ．$\boxed{\text{ク}}+p+p^2$は奇数であり，pの倍数ではないから，$\boxed{\text{ケ}}+q$は$2p^2$の倍数となり，

$$\boxed{\text{ケ}}+q=2p^2k \quad (k\text{は自然数})$$

とおける．したがって，

$$q=(\boxed{\text{ク}}+p+p^2)k$$

となるが，qは素数であるから，$k=\boxed{\text{コ}}$である．よって

$$p^2-p-\boxed{\text{サ}}=0$$

これを解いて，$p=\boxed{\text{シ}}$である．ゆえに$n=\boxed{\text{ス}}$である．

(2) 条件

$$a_1=3, \quad a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められる数列$\{a_n\}$に対して，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$とおくと，数列$\{b_n\}$は等比数列となり，これより，数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\frac{\boxed{\text{セ}}\cdot\boxed{\text{ソ}}^{\,n}+\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}^{\,n}-\boxed{\text{ツ}}}$$

となる．