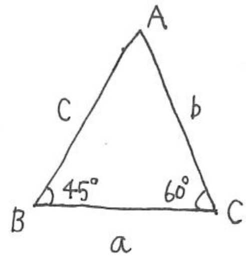
2010年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ △ABCにおいて，$B = 45^\circ$，$C = 60^\circ$とする．3頂点A，B，Cの対辺の長さをそれぞれa，b，cで表すとき，$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$の値を求めよ．



余弦定理より

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 45^\circ$$

よって，$a^2 - b^2 + c^2 = 2ac \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ …①

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60^\circ$$

よって，$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \frac{1}{2}$ …②

与式に代入して，$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2} = \dfrac{ab}{\sqrt{2}ac} = \dfrac{b}{\sqrt{2}c}$ …③

ここで，正弦定理より

$\dfrac{b}{\sin 45^\circ} = 2R$ $\quad\therefore b = \sqrt{2}R$ …④

$\dfrac{c}{\sin 60^\circ} = 2R$ $\quad\therefore c = \sqrt{3}R$ …⑤

③に④，⑤を代入して

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}R} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ //