



2011年 理工学部 第4問

4 整数 a, b, c に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+c-b \end{pmatrix}$ をとる. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $Q = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & u \end{pmatrix}$ に対して,

$$Q^3 - Q = \begin{pmatrix} s(s^2 - 1) & t(s^2 + u^2 + su - 1) \\ 0 & u(u^2 - 1) \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(2) 整数 x, y, z に対して, 行列 $R = \begin{pmatrix} 6x & y \\ 0 & 6z \end{pmatrix}$ をとる. このとき, 行列 $\frac{1}{6}R^2$ の各成分が整数であることを示せ.

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $B = PAP^{-1}$ を求めよ. さらに, 行列 $\frac{1}{6}(B^3 - B)^2$ の各成分が整数であることを示せ.

(4) 行列 $\frac{1}{6}(A^3 - A)^2$ の各成分が整数であることを示せ.