0002184185187999

東京海洋大学

2016年 海洋工 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線$C : y=f(x)$を考える．

(1) $f(x)$の極値を求めよ．

(2) 曲線C，2直線$x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）およびx軸で囲まれる図形を，x軸の周りに1回転して得られる立体の体積Vをtを用いて表せ．

(3) Vの最大値を求めよ．

(1) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$		$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

∴ $f'(x)=0$ となるのは，$x=1$ のとき

右の増減表より，極大値 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ($x=1$ のとき) をとる //

(2) $x>0$ において，$f(x)>0$ であるから

$$V=\pi\int_t^{t+1}\left(\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_t^{t+1}x\cdot(-e^{-x})'dx$$

$$=\pi\left[-xe^{-x}\right]_t^{t+1}-\pi\int_t^{t+1}-e^{-x}dx$$

$$=\pi\left\{-(t+1)e^{-(t+1)}+te^{-t}\right\}-\pi\left[e^{-x}\right]_t^{t+1}$$

$$=\pi\left\{-(t+1)e^{-t-1}+te^{-t}-e^{-t-1}+e^{-t}\right\}$$

$$=\pi\left\{(e-1)t+e-2\right\}e^{-t-1}$$ //

(3) $V'=\pi(e-1)e^{-t-1}+\pi\left\{(e-1)t+e-2\right\}\cdot(-e^{-t-1})$

$=\pi\left\{1-(e-1)t\right\}e^{-t-1}$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
V'		$+$	0	$-$
V		↗		↘

∴ $V'=0$ となるのは，$t=\frac{1}{e-1}$ のとき

$t=\frac{1}{e-1}$ のとき，$V=\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$

∴ 右の増減表より，Vの最大値は，

$\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$ ($t=\frac{1}{e-1}$ のとき) //