0001859270418999

山口大学

2014年 第3問

数理 石井K

3 次の問いに答えなさい．

(1) 2つの整数 a, b が $1+\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$ を満たすならば，$a=b=1$ であることを示しなさい．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは示さなくてよい．

(2) k を自然数とする．2つの整数 a, b が $(1+\sqrt{2})^{k+1}=a+b\sqrt{2}$ を満たしているとき，$(1+\sqrt{2})^k=a'+b'\sqrt{2}$ を満たす整数 a', b' を a, b を用いて表しなさい．

(3) すべての自然数 n に対して，
命題「2つの整数 a, b が $(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}$ を満たしているならば，$(1-\sqrt{2})^n=a-b\sqrt{2}$ である」
が成り立つことを数学的帰納法を用いて示しなさい．

(1) $(a-1)+(b-1)\sqrt{2}=0$

ここで $b\neq 1$ とすると．$\sqrt{2}=\dfrac{1-a}{b-1}$ となり．(左辺)：無理数，(右辺)：有理数

となり矛盾する ∴ $b=1$ であり、このとき $a-1=0$ すなわち $a=b=1$ ■

(2) $(1+\sqrt{2})^{k+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^k$ より． $(a+b\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})\cdot(a'+b'\sqrt{2})$

∴ $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}+a'\sqrt{2}+2b'$

(1)より． $a=a'+2b'$，$b=b'+a'$

∴ $\underline{a'=-a+2b,\ b'=a-b}$ //

(3) (i) $n=1$ のとき． $1+\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$ ∴ (1)より $a=b=1$

このとき．$(1-\sqrt{2})^1=1-\sqrt{2}$ より． 成立している．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、$(1+\sqrt{2})^k=a'+b'\sqrt{2}$，かつ，$(1-\sqrt{2})^k=a'-b'\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^{k+1}=a+b\sqrt{2}$ をみたしているとすると，(2)より． $a'=-a+2b$，$b'=a-b$．

このとき． $(1-\sqrt{2})^{k+1}=(1-\sqrt{2})(a'-b'\sqrt{2})$

$=(1-\sqrt{2})\{-a+2b-(a-b)\sqrt{2}\}$

$=-a+2b-(a-b)\sqrt{2}+a\sqrt{2}-2\sqrt{2}b+2(a-b)$

$=a-b\sqrt{2}$ となり $n=k+1$ のときも成り立つ

∴すべての自然数について成り立つ ■