0001825814718999

# 弘前大学

2014年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{x}{2^x}$ とし，$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 定数 $c$ を $0 \leqq c \leqq 2$ とする．このとき，$0 \leqq x \leqq 2$ を満たす $x$ に対して，不等式

$$f(x) \leqq f'(c)(x-c)+f(c)$$

参考 $y=f(x)$ 上の点 $(c, f(c))$ における接線の式なので，$f(x)$：上に凸 であることから証明してもよい．

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか述べよ．

(2) $n$ を自然数とする．$x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ は0以上の実数で，$x_1+x_2+\cdots+x_n=2$ を満たすとする．このとき，不等式

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqq nf\left(\frac{2}{n}\right)$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか述べよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{2^x-x\cdot 2^x\log 2}{(2^x)^2}=\dfrac{1-x\log 2}{2^x}$，$f''(x)=\dfrac{-\log 2\cdot 2^x-(1-x\log 2)\cdot 2^x\log 2}{(2^x)^2}=\dfrac{\log 2(x\log 2-2)}{2^x}$

$\therefore$ $g(x)=f'(c)(x-c)+f(c)-f(x)$ とおくと，$g'(x)=f'(c)-f'(x)$

$\therefore$ $g''(x)=-f''(x)=\dfrac{\log 2(2-x\log 2)}{2^x}>0$ $(\because 0 \leqq x \leqq 2)$

$\therefore$ $g'(x)$ は単調増加，$g'(c)=0$

$\therefore$ $g(c)=0$ で増減表より．$0 \leqq x \leqq 2$ で $g(x) \geqq 0$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ | |

すなわち．$f(x) \leqq f'(c)(x-c)+f(c)$ が成り立つ ■

(2) $x_i \geqq 0$ かつ $x_1+x_2+\cdots+x_n=2$ より $0 \leqq x_i \leqq 2$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

$\therefore$ (1)より．$f(x_i) \leqq f'(c)(x_i-c)+f(c)$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n}\left\{f'(c)(x_i-c)+f(c)\right\}$$

$$=f'(c)\sum_{i=1}^{n} x_i+\left\{-cf'(c)+f(c)\right\}\cdot n$$

ここで，$c=\dfrac{2}{n}$ とすると，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqq nf\left(\frac{2}{n}\right)$ となる．

等号成立は．各 $x_i=\dfrac{2}{n}$ すなわち $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{2}{n}$ のとき ■