宮城大学

2015年 第2問

$\boxed{2}$ a, b, cを実数とするとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$が，ともに成り立つとき，a, b, cの値を求めなさい．

(2) $a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$を証明しなさい．

(1) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \iff \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2=0$

$\iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\iff a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$

$\iff a=b=c$

$\therefore$ $a+b+c=1$ より，$\underline{a=b=c=\frac{1}{3}}$ //

(2) (左辺)−(右辺) $= a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

$= \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\right\}$

$= \frac{1}{3}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

$\geqq 0$ (等号成立は $a=b=c$) ▨