数理 石井K

2012年 第3問

3 xy 平面上に点 P(1, 0) を中心とする円：$(x-1)^2+y^2=1$ がある．この円周上に 4 点 A$\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$, B$\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$, C$(\alpha, \beta)$, D$(\gamma, \delta)$ がある．ただし，$\delta < -\frac{4}{5}$ とする．$\angle$ABC $= 90°$ であり，三角形 ACD の面積は $\frac{63}{65}$ であるとする．

(1) 点 C の座標は，$\left(\frac{\boxed{ツ}\ 1}{\boxed{テ}\ 5},\ -\frac{\boxed{ト}\ 3}{\boxed{テ}\ 5}\right)$ である．

(2) AB の長さは $\frac{14\ \boxed{ナニ}\sqrt{\boxed{ヌネ}}\ 65}{\boxed{ヌネ}\ 65}$ であり，$\cos\angle$BDC $= \frac{7\ \boxed{ノ}\sqrt{\boxed{ハヒ}}\ 65}{65\ \boxed{ハヒ}}$ である．

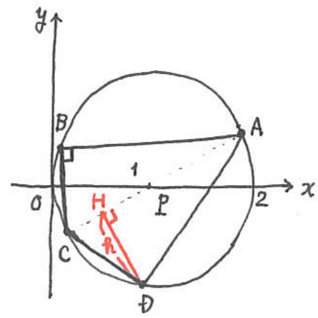
(3) 点 D の座標は $\left(\frac{\boxed{フヘ}\ 18}{\boxed{ホマ}\ 13},\ -\frac{12\ \boxed{ミム}}{\boxed{メモ}\ 13}\right)$ であり，$\cos\angle$BPD $= -\frac{\boxed{ヤユヨ}\ 120}{169}$ である．

(1). $\angle ABC = 90°$ より．ACは円の直径である．

よって．線分ACの中点が点Pになるので．

$\left(\frac{\frac{9}{5}+\alpha}{2}, \frac{\frac{3}{5}+\beta}{2}\right) = (1, 0)$ ∴ $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = -\frac{3}{5}$

∴ $C\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ //



(2) $AB = \sqrt{\left(\frac{1}{13}-\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{14\sqrt{65}}{65}$ //

弧BCに対する円周角より．$\angle BDC = \angle BAC$

∴ $\cos\angle BDC = \cos\angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$ //　(∵ AC = (直径) = 2)

(3). 点DからACに下ろした垂線とACの交点をHとおき，DH = h とすると．

$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot h = \frac{63}{65}$ より．$h = \frac{63}{65}$，AC: $3x-4y-3=0$ であるから．

点と直線のキョリ公式より．$h = \frac{|3\gamma-4\delta-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}$　$\delta < -\frac{4}{5}$, $\gamma > 0$ より．$3\gamma-4\delta-3>0$

∴ $\frac{3\gamma-4\delta-3}{5} = \frac{63}{65}$　$\gamma = \frac{4}{3}\delta + \frac{34}{13}$　Dは円上の点より．$\left(\frac{4}{3}\delta+\frac{21}{13}\right)^2+\delta^2 = 1$

∴ $\left(\frac{1}{3}\delta+\frac{4}{13}\right)\left(\frac{25}{3}\delta+\frac{68}{13}\right) = 0$　$\delta < -\frac{4}{5}$ より．$\delta = -\frac{12}{13}$, $\gamma = \frac{18}{13}$　∴ $D\left(\frac{18}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ //

$BD = \sqrt{\left(\frac{18}{13}-\frac{1}{13}\right)^2+\left(-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\right)^2}$　∴ 余弦定理より．$\cos\angle BPD = -\frac{120}{169}$ //