2011年 教育学部（中等数学） 第3問

数理 石井K

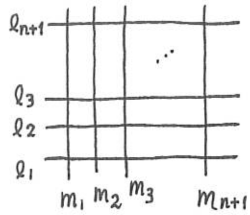
$\boxed{3}$ n を1以上の整数とする．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1$ に対して，xy 平面上で，点 $(0,\ k)$ を通り x 軸に平行な直線を ℓ_k とし，点 $(k,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線を m_k とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線

$$\ell_1,\ \ell_2,\ \cdots,\ \ell_n,\ \ell_{n+1}$$

から相異なる2本を選び，直線

$$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n,\ m_{n+1}$$



から相異なる2本を選ぶと長方形が1つできる．こうしてできる長方形の総数を求めよ．ただし，合同であっても位置が違う長方形は異なるものとする．

(2) (1)で考えた長方形のうちから1つとるとき，それが正方形である確率を求めよ．

(1). ${}_{n+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2 = \dfrac{n(n+1)}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \underline{\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \text{ 個}}$ //

(2) 1辺の長さが1の正方形は．n^2 個.

〃 2 〃 $(n-1)^2$ 個

⋮

〃 k 〃 $(n+1-k)^2$ 個.

⋮

〃 n 〃 1^2 個.

あるので，正方形の個数は．

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1)^2 - 2(n+1)k + k^2\right\}$$

$$= n\cdot(n+1)^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= n(n+1)^2 - n(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ 個.}$$

∴ 求める確率は． $\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2} = \underline{\dfrac{2(2n+1)}{3n(n+1)}}$ //