0002075634297999

宮城教育大学

2015年 教育学部（中等数学） 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ p，qを自然数として，$p>q$とする．等差数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとするとき，$S_p=\dfrac{p}{q}$，$S_q=\dfrac{q}{p}$が成り立つとする．次の問に答えよ．

(1) 数列$\{a_n\}$の初項と公差をp，qを用いて表せ．

(2) 自然数mに対して，数列$\{a_n\}$の初項から第2^m項までの和の逆数をb_mとする．このとき，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和を求めよ．

(3) (2)の数列$\{b_n\}$について無限級数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$の和が48であり，数列$\{a_n\}$の第$p+q$項が$\dfrac{17}{48}$であるとき，$p$と$q$を求めよ．

(1) $\{a_n\}$は等差数列であるから，初項をa，公差をdとすると，$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$\therefore S_p=\frac{p}{q}$ より，$\frac{1}{2}p\{2a+(p-1)d\}=\frac{p}{q}$

pは自然数より．$p\neq0$　両辺をpで割って．

$$a+\frac{p-1}{2}\cdot d=\frac{1}{q}\quad\cdots①$$

S_qについても同様にして．　$a+\frac{q-1}{2}\cdot d=\frac{1}{p}\quad\cdots②$

①－②より．

$$\frac{p-q}{2}\cdot d=\frac{p-q}{pq}$$

$p>q$より．$p-q>0$ なので，両辺$p-q$で割ってdを求めると．

$d=\frac{2}{pq}$　　これを①に代入して．　$a=\frac{1}{q}-\frac{p-1}{pq}=\frac{1}{pq}$

$\therefore$ 初項 $\frac{1}{pq}$，公差 $\frac{2}{pq}$ //

(2) (1)より．

$$b_m=\left[\frac{1}{2}\cdot2^m\left\{2\cdot\frac{1}{pq}+(2^m-1)\cdot\frac{2}{pq}\right\}\right]^{-1}$$
$$=\left\{2^{m-1}\cdot\frac{2^{m+1}}{pq}\right\}^{-1}$$
$$=\left(\frac{2^{2m}}{pq}\right)^{-1}$$
$$=\frac{pq}{4^m}$$

$\therefore b_m$は初項$\frac{pq}{4}$，公比$\frac{1}{4}$の等比数列より．その和は．$\dfrac{\frac{pq}{4}\{1-(\frac{1}{4})^n\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{pq}{3}\{1-(\frac{1}{4})^n\}$ //

0002075634297999

宮城教育大学

2015年 教育学部（中等数学） 第1問　2枚目／2枚

数理石井K

1 p, q を自然数として，$p > q$ とする．等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_p = \dfrac{p}{q}$，$S_q = \dfrac{q}{p}$ が成り立つとする．次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を p, q を用いて表せ．

(2) 自然数 m に対して，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 2^m 項までの和の逆数を b_m とする．このとき，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

(3) (2)の数列 $\{b_n\}$ について無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の和が48であり，数列 $\{a_n\}$ の第 $p+q$ 項が $\dfrac{17}{48}$ であるとき，p と q を求めよ．

(3) (2)より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{pq}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} = \frac{pq}{3} \qquad \therefore \frac{pq}{3} = 48 \text{ より} \quad pq = 144 \quad \cdots ③$$

また，$a_{p+q} = \dfrac{1}{pq} + (p+q-1)\cdot\dfrac{2}{pq}$

$= \dfrac{2p+2q-1}{pq}$

$\therefore \dfrac{2p+2q-1}{pq} = \dfrac{17}{48} \quad \cdots ④$

④に③を代入して，整理すると，$p+q=26 \quad \cdots ⑤$

③，⑤より，p, q は，方程式 $x^2-26x+144=0$ の解である．

$\therefore (x-8)(x-18)=0 \qquad x=8, 18$

$p>q$ より，$\underline{(p, q)=(18, 8)}$ //