宮城教育大学

2015年 教育学部（中等数学） 第2問

2 実数 p, q に対して,

$$f(x) = x^2 + px + q, \quad g(x) = x^3 - 3x$$

とおく．2次方程式 $f(x) = 0$ の2つの解を α, β として，次の問に答えよ．

(1) 2次方程式の解と係数の関係を用いて，積 $g(\alpha)g(\beta)$ を p, q を用いて表せ．

(2) $g(\alpha) = 0$ または $g(\beta) = 0$ であるとき，点 (p, q) の集合を座標平面上に図示せよ．

(3) $g(\alpha) = 0$ または $g(\beta) = 0$ ならば，α と β は実数であることを示せ．

(1) 解と係数の関係より. $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

$$g(\alpha)g(\beta) = (\alpha^3-3\alpha)(\beta^3-3\beta)$$
$$= \alpha\beta(\alpha^2-3)(\beta^2-3)$$
$$= q\left[(\alpha\beta)^2 - 3\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 9\right]$$
$$= q\left[q^2 - 3\{(-p)^2 - 2q\} + 9\right]$$
$$= \underline{q^3 - 3p^2q + 6q^2 + 9q} \;/\!/$$

(3)（別）(2)で求めた集合がすべて $D = p^2 - 4q \geqq 0$ に含まれることを言ってもよい.

(2) (1)より. $g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0 \iff g(\alpha)g(\beta)=0$ より.

$$q(q^2+6q-3p^2+9)=0$$

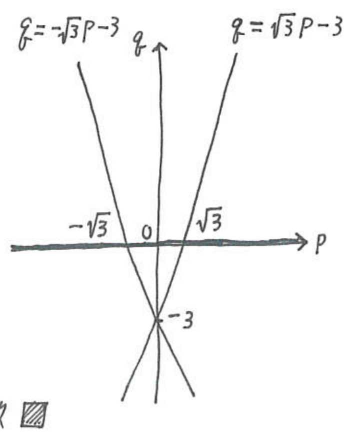
$\therefore$ $q=0$ または. $q^2+6q-3p^2+9=0$

さらに. $q^2+6q-3p^2+9=0 \iff (q+3)^2-3p^2=0$

$\iff (q+3+\sqrt{3}p)(q+3-\sqrt{3}p)=0$

以上より. $q=0$ または. $q=-\sqrt{3}p-3$ または. $q=\sqrt{3}p-3$

$\therefore$ 右図のようになる.



(3) $g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0$ のとき. (2)より.

$q=0$ または $q^2+6q-3p^2+9=0$

(i) $q=0$ のとき. $f(x)=x(x+p)$ $\therefore (\alpha, \beta)=(0,-p), (-p, 0)$

$\therefore$ ともに実数

(ii) $q^2+6q-3p^2+9=0$ のとき. $p^2=\frac{1}{3}q^2+2q+3$

$\therefore$ $f(x)=0$ の判別式 D は. $D=p^2-4q=\frac{1}{3}(q-3)^2 \geqq 0$ $\therefore$ ともに実数 ▨