宮城教育大学

2015年 教育学部（その他） 第2問

2 実数 p, q に対して，

$$f(x)=x^2+px+q,\quad g(x)=x^3-3x$$

とおく．2次方程式 $f(x)=0$ の2つの解を α, β として，次の問に答えよ．

(1) 2次方程式の解と係数の関係を用いて，積 $g(\alpha)g(\beta)$ を p, q を用いて表せ．

(2) $g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0$ であるとき，点 $(p,\ q)$ の集合を座標平面上に図示せよ．

(3) $g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0$ ならば，α と β は実数であることを示せ．

(1) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

$$\begin{aligned}
g(\alpha)g(\beta)&=(\alpha^3-3\alpha)(\beta^3-3\beta)\\
&=\alpha^3\beta^3-3\alpha^3\beta-3\alpha\beta^3+9\alpha\beta\\
&=(\alpha\beta)^3-3\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+9\alpha\beta\\
&=q^3-3q(p^2-2q)+9q\\
&=\underline{q^3+6q^2-3p^2q+9q}\ /\!/
\end{aligned}$$

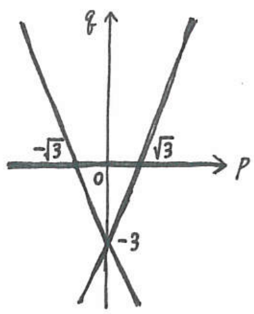
(2) $g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0$ $\iff g(\alpha)g(\beta)=0$

$\iff q(q^2+6q-3p^2+9)=0$

$\iff q(\sqrt{3}p+q+3)(-\sqrt{3}p+q+3)=0$

$\iff q=0$ または $q=-\sqrt{3}p-3$ または $q=\sqrt{3}p-3$

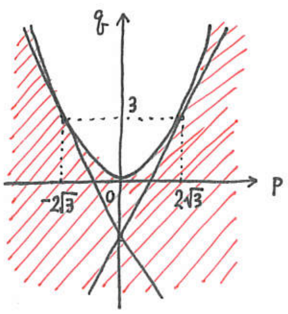
∴ 右の太線部分となる．



(3) $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

α,β が実数 $\iff D=p^2-4q\geqq 0$

$\iff q\leqq \frac{1}{4}p^2$



よって，(2)で求めた集合はすべて斜線部分に含まれるので

$g(\alpha)=0$ または $g(\beta)=0$ ならば，α と β は実数である ▨