

2017年 教育学部（中等数学）第3問

3 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 7,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{(a_n + 1)^2 + b_n^2}, \quad b_{n+1} = -\frac{b_n}{(a_n + 1)^2 + b_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する.  $z_n = a_n + b_n i$  ( $i$ は虚数単位) および  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  とおいて, 次の問に答えよ.

(1)  $a_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )であることを示せ.

(2)  $z_{n+1} = \frac{1}{z_n + 1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) および  $\alpha = \frac{1}{\alpha + 1}$ であることを示せ.

(3)  $|z_{n+1} - \alpha| = \frac{\alpha |z_n - \alpha|}{|z_n + 1|}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )であることを示せ.

(4)  $|z_n - \alpha| \leq \alpha^{n-1} |z_1 - \alpha|$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )であることを示せ.

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.