

2017年教育学部(中等数学)第3問

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 3$$
, $b_1 = 7$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{(a_n + 1)^2 + b_n^2}, \quad b_{n+1} = -\frac{b_n}{(a_n + 1)^2 + b_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する. $z_n=a_n+b_ni$ (i は虚数単位) および $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおいて,次の問に答えよ.

(1) $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ.

$$(2)$$
 $z_{n+1} = \frac{1}{z_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ および $\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ であることを示せ.

$$|z_{n+1}-\alpha|=rac{lpha|z_n-lpha|}{|z_n+1|} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
であることを示せ.

$$(4) |z_n - \alpha| \le \alpha^{n-1} |z_1 - \alpha| (n = 1, 2, 3, \dots)$$
 であることを示せ.

(5) $\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ.