

2018年 教育学部（中等数学）第3問

3 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する.  $i$  を虚数単位として,  $r > 0$  と  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を

$$\frac{1+2i}{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

が成り立つように定める. 次の問に答えよ.

- (1)  $r$  の値を求めよ.
- (2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n + b_n i = \left( \frac{1+2i}{3} \right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 複素数  $z$  に対して,  $z \neq 1$  ならば

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

- (4) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の和を求めよ.