0000928541709999

電気通信大学

2012年 第2問　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t\sin x - f(x)\}^2\,dx \quad (t\text{ は実数})$$

を考える．定数 c_1，c_2，c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) I を，t および c_1，c_2，c_3 を用いて表せ．

(2) c_1 の値を求めよ．

以下では，I を最小にする t の値を t_0 とし，その最小値を I_0 とする．

(3) t_0 を c_2 を用いて表せ．また，I_0 を c_2，c_3 を用いて表せ．

(4) 次の定積分 A，B の値を求めよ．

$$A = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \quad B = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

(5) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき，c_2，c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ．

(1) $I = \int_0^{\pi} t^2\sin^2 x - 2t\sin x\, f(x) + \{f(x)\}^2\,dx$

$= t^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx - 2t\int_0^{\pi}\sin x\, f(x)\,dx + \int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx$

$= \underline{c_1 t^2 - 2c_2 t + c_3}$ //

(2) $c_1 = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$

$= \underline{\frac{\pi}{2}}$ //

(3) (1) より $I = \frac{\pi}{2}t^2 - 2c_2 t + c_3$

$= \frac{\pi}{2}\left(t - \frac{2}{\pi}c_2\right)^2 - \frac{2}{\pi}c_2^2 + c_3$

$\therefore \underline{t_0 = \frac{2}{\pi}c_2}$ //　$\underline{I_0 = -\frac{2}{\pi}c_2^2 + c_3}$ //

2012年 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

2 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，定積分

$$I = \int_0^{\pi} \{t \sin x - f(x)\}^2 dx \quad (t \text{ は実数})$$

を考える．定数 c_1，c_2，c_3 を

$$c_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx, \quad c_2 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x\, dx, \quad c_3 = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) I を，t および c_1，c_2，c_3 を用いて表せ．

(2) c_1 の値を求めよ．

以下では，I を最小にする t の値を t_0 とし，その最小値を I_0 とする．

(3) t_0 を c_2 を用いて表せ．また，I_0 を c_2，c_3 を用いて表せ．

(4) 次の定積分 A，B の値を求めよ．

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x\, dx, \quad B = \int_0^{\pi} x \cos x\, dx$$

(5) $f(x) = x(\pi - x)$ のとき，c_2，c_3 および I_0 の値をそれぞれ求めよ．

(5) のつづき

(3) より $I_0 = -\frac{2}{\pi} \cdot 4^2 + \frac{\pi^5}{30} = \underline{\frac{\pi^5}{30} - \frac{32}{\pi}}$ //

(4)

$$A = \int_0^{\pi} x(-\cos x)' dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\, dx = \pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \underline{\pi}$$ //

$$B = \int_0^{\pi} x(\sin x)' dx = \left[x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \underline{-2}$$ //

(5)

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin x\, dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx \\ &= \pi A - \int_0^{\pi} x^2 (-\cos x)' dx \\ &= \pi A - \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -2x \cos x\, dx \\ &= \pi A - 2B - \pi^2 \\ &= \underline{4} \end{aligned}$$ //

$$\begin{aligned} c_3 &= \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{\pi x^4}{2} + \frac{\pi^2 x^3}{3}\right]_0^{\pi} \\ &= \underline{\frac{\pi^5}{30}} \end{aligned}$$ //