0002001638997999

香川大学

2015 年 教育学部・農学部 第 4 問

数理 石井K

4 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，点 $\left(\frac{3}{2}a,\ -a\right)$ を頂点とし，点 $(a,\ 0)$ を通る放物線である．ただし，$a \neq 0$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 2 次関数 $y=f(x)$ を a を用いて表せ．

(2) $a>0$ とするとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を，積分を計算することによって求めよ．

(3) $S(2^n)>7^{10}$ となる最小の自然数 n を求めよ．必要であれば，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ を用いてもよい．

(1) 頂点が $\left(\frac{3}{2}a, -a\right)$ であることより．$f(x)=p\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2-a$ と表せる．

また，$(a, 0)$ を通ることより．$0=p\left(-\frac{1}{2}a\right)^2-a$

$\therefore \frac{1}{4}a^2p=a$ 　$a \neq 0$ より．$p=\frac{4}{a}$

$\therefore \underline{f(x)=\frac{4}{a}x^2-12x+8a}$ //

(2) (1) より $f(x)=\left(\frac{4}{a}x-8\right)(x-a)$ 　$\therefore$ $y=f(x)$ と x 軸との交点は．

$(2a, 0)$ と $(a, 0)$．また．$y=f(x)$ のグラフは $a>0$ より．下に凸であるから

$$\therefore S(a)=\int_a^{2a} -\frac{4}{a}x^2+12x-8a\,dx$$

$$=-\frac{4}{a}\int_a^{2a}(x-a)(x-2a)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{a}\cdot(2a-a)^3$$

$$=\underline{\frac{2}{3}a^2}\ //$$

(3) (2) より．$S(2^n)=\frac{2}{3}\cdot 2^{2n}=\frac{2^{2n+1}}{3}$ 　$\therefore$ $S(2^n)>7^{10}$ より

$2^{2n+1}>3\cdot 7^{10}$ 　両辺，対数をとって　$(2n+1)\log_{10}2>\log_{10}3+10\log_{10}7$

$$\therefore 2n+1>\frac{0.4771+10\cdot 0.8451}{0.3010} \fallingdotseq 29.66$$

$\therefore 2n>28.66$ 　$\therefore n>14.33$ 　$\therefore \underline{n=15}$ //