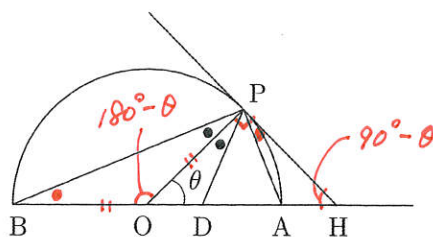


2014年理系2第3問



3 図のように、点Oを中心とし、線分ABを直径とする半径1の半円において、円周上に点Pをとり、 $\angle POA = \theta$ とし、点Pにおける接線が線分OAの延長と交わる点をHとする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。さらに、線分OA上に $\angle OPB = \angle OPD$ となるように点Dをとる。



(1) $AP = \boxed{\text{ア}}^2 \sin \frac{\theta}{\boxed{\text{イ}}^2}$ である。

(1) 余弦定理より。

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AP}{\theta} = \boxed{\text{ウ}}^1$ である。

$$AP^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta$$

$$= 2 - 2 \cos \theta$$

(3) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{\theta^2} = \frac{\boxed{\text{エ}}^1}{\boxed{\text{オ}}^2}$ である。

$$= 4 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

(4) $\lim_{\theta \rightarrow +0} OD = \frac{\boxed{\text{カ}}^1}{\boxed{\text{キ}}^3}$ である。

$$= 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(2) \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AP}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ より } AP = 2 \sin \frac{\theta}{2} //$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$= \underline{\underline{1}} //$$

(3) $\angle OHP = 90^\circ - \theta$, $\angle APH = \bullet = \frac{\theta}{2}$

∴ 正弦定理より。

$$\frac{AP}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{AH}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore AH = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \theta} \times \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos \theta}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} //$$

(4) 正弦定理より。

$$\frac{1}{\sin(180^\circ - \frac{3}{2}\theta)} = \frac{OD}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore OD = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{3}{2}\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} OD = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{3}{2}\theta}{\sin \frac{3}{2}\theta} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} //$$