宮城教育大学

2015年 教育学部（中等理科） 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ p, qを自然数として，$p>q$とする．等差数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとするとき，$S_p=\dfrac{p}{q}$, $S_q=\dfrac{q}{p}$が成り立つとする．次の問に答えよ．

(1) 数列$\{a_n\}$の初項と公差をp, qを用いて表せ．

(2) 自然数mに対して，数列$\{a_n\}$の初項から第2^m項までの和の逆数をb_mとする．このとき，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和を求めよ．

(3) (2)の数列$\{b_n\}$の初項が36であり，数列$\{a_n\}$の第$p+q$項が$\dfrac{17}{48}$であるとき，pとqを求めよ．

(1) $\{a_n\}$は等差数列であるから，初項をa，公差をdとすると，$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$\therefore S_p=\frac{p}{q}$より，$\frac{1}{2}p\{2a+(p-1)d\}=\frac{p}{q}$

pは自然数より，$p\neq 0$ 両辺をpで割って，$a+\frac{p-1}{2}\cdot d=\frac{1}{q}$ …①

S_qについても同様にして，$a+\frac{q-1}{2}\cdot d=\frac{1}{p}$ …②

①−②より，$\frac{p-q}{2}\cdot d=\frac{p-q}{pq}$

$p-q>0$より，両辺$(p-q)$で割ってdを求めると，$d=\frac{2}{pq}$ ①に代入して，$a=\frac{1}{pq}$

$\therefore$ 初項$\frac{1}{pq}$，公差$\frac{2}{pq}$ //

(2) $b_m=\left[\frac{1}{2}\cdot 2^m\left\{2\cdot\frac{1}{pq}+(2^m-1)\cdot\frac{2}{pq}\right\}\right]^{-1}$

$=\left\{2^{m-1}\cdot\frac{2^{m+1}}{pq}\right\}^{-1}$

$=\frac{pq}{4^m}$

$\therefore \{b_m\}$は初項$\frac{pq}{4}$，公比$\frac{1}{4}$の等比数列より，その和は，$\dfrac{\frac{pq}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{pq}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ //

(3) (2)より，

$\frac{pq}{4}=36$ $\therefore pq=144$ …③

(1)より，

$\frac{1}{pq}+(p+q-1)\cdot\frac{2}{pq}=\frac{17}{48}$ ③を代入して，$2p+2q-2+1=51$

$\therefore p+q=26$ …④

③，④より，p, qは方程式$x^2-26x+144=0$の解である

$\therefore (x-8)(x-18)=0$ $p>q$より，$p=18$, $q=8$ //