

2017年教育学部（中等数学）第3問

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 7,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{(a_n + 1)^2 + b_n^2}, \quad b_{n+1} = -\frac{b_n}{(a_n + 1)^2 + b_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する. $z_n = a_n + b_n i$ (i は虚数単位) および $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおいて, 次の問に答えよ.

(1) $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ.

(2) $z_{n+1} = \frac{1}{z_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) および $\alpha = \frac{1}{\alpha + 1}$ であることを示せ.

(3) $|z_{n+1} - \alpha| = \frac{\alpha |z_n - \alpha|}{|z_n + 1|}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ.

(4) $|z_n - \alpha| \leq \alpha^{n-1} |z_1 - \alpha|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.