

2018年 教育学部（中等数学）第3問

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する. i を虚数単位として, $r > 0$ と $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を

$$\frac{1+2i}{3} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

が成り立つように定める. 次の問に答えよ.

- (1) r の値を求めよ.
- (2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n + b_n i = \left(\frac{1+2i}{3} \right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 複素数 z に対して, $z \neq 1$ ならば

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ.