0001034725698999

宮城教育大学

2012年 教育学部（中等数学） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 2つの箱A，Bに赤玉と白玉が入っており，箱Aの赤玉と白玉の個数の比率は $p:1-p\,(0<p<1)$，箱Bの赤玉と白玉の個数の比率は $q:1-q\,(0<q<1)$ であるとする．この2つの箱のどちらかを選び，そこから玉を1個取り出して色を調べてもとに戻すという操作をくり返し行うものとする．取り出した玉が赤玉であれば次はAの箱から玉を取り出すものとし，白玉であれば次はBの箱から玉を取り出すものとする．最初は箱Aから玉を取り出すことにしたとき，第 n 回目に赤玉を取り出す確率を a_n とする．$a_1=p$ である．次の問いに答えよ．

(1) a_2 を p，q を用いて表せ．

(2) a_{n+1} を a_n，p，q を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 1回目が赤玉で2回目も赤玉である確率は，$p\cdot p=p^2$

1回目が白玉で2回目は赤玉である確率は，$(1-p)\cdot q=q-pq$

よって，$\underline{a_2=p^2-pq+q}$ //

(2) n回目が赤玉で $n+1$ 回目も赤玉である確率は，$a_n\cdot p$

n回目が白玉で $n+1$ 回目は赤玉である確率は，$(1-a_n)\cdot q$

よって，$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)$

$\therefore\ \underline{a_{n+1}=(p-q)a_n+q}$ //

特性方程式

$\alpha=(p-q)\alpha+q$

$\therefore (q-p+1)\alpha=q$

$\therefore \alpha=\dfrac{q}{q-p+1}$

(3) (2)より，

$$a_{n+1}-\frac{q}{q-p+1}=(p-q)\cdot\left(a_n-\frac{q}{q-p+1}\right)$$

$\therefore$ 数列 $\left\{a_n-\dfrac{q}{q-p+1}\right\}$ は初項 $p-\dfrac{q}{q-p+1}=\dfrac{(1-p)(p-q)}{q-p+1}$，

公比 $(p-q)$ の等比数列

$$\therefore a_n-\frac{q}{q-p+1}=\frac{(1-p)(p-q)}{q-p+1}\cdot(p-q)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{a_n=\frac{(1-p)(p-q)^n+q}{q-p+1}}\ //$$