0002216273877999

宮城教育大学

2016年 教育学部（中等数学）第1問

$\boxed{1}$ A, Bは実数で $A^{11}=8$, $B^{13}=4$ であるとする．整数 x, y が $A^x \cdot B^y = 2$ を満たすとき，$|x+y|$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

$A^{11}=8$ より，$11\log_2 A = \log_2 8$ $\quad \therefore \log_2 A = \dfrac{3}{11}$ $\cdots$①

$B^{13}=4$ より，$13\log_2 B = \log_2 4$ $\quad \therefore \log_2 B = \dfrac{2}{13}$ $\cdots$②

$A^x \cdot B^y = 2$ より，$\log_2 A^x \cdot B^y = \log_2 2$ $\quad \therefore x\log_2 A + y\log_2 B = 1$ $\cdots$③

③に①,②を代入して，

$$\frac{3}{11}x + \frac{2}{13}y = 1$$

$\therefore 39x + 22y = 143 \cdots (*)$

$39x = 11(13-2y)$

$\therefore$ $13-2y$は整数で右辺は11の倍数．39と11は互いに素なので

xは11の倍数 $\quad \therefore x = 11k$ (k:整数) と表せる．

同様に，$22y = 13(11-3x)$ を考えると，$y = 13l$ (l:整数) と表せる．

$(*)$ にそれぞれ代入して，

$39 \cdot 11k + 22 \cdot 13l = 143$

$\therefore 3k + 2l = 1 \cdots$④

$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 \cdots$⑤

④−⑤より，$3(k-1) + 2(l+1) = 0$

$\therefore 3(k-1) = -2(l+1)$

2と3は互いに素なので，$k-1 = 2n$ (n:整数) と表せる $\quad \therefore k = 2n+1$

このとき，$3 \cdot 2n = -2(l+1)$ $\quad \therefore l = -3n-1$

$\therefore x = 11k = 22n+11$, $y = 13l = -39n-13$

$\therefore |x+y| = |-17n-2| = |17n+2|$ $\quad \therefore$ 最小値 2 ($n=0$のとき)

すなわち，最小値 2 ($x=11$, $y=-13$ のとき)