宮城教育大学

2016年 教育学部（その他） 第3問

1枚目／2枚

数理 石井K

3 k を実数として2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -x^2 + 4x + k$$

を考える．点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C_1 の接線を ℓ とする．C_2 は ℓ に点Qで接するとして，点Qの x 座標を b とする．不等式 $a > b > 0$ が成り立つとする．C_1 と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とし，C_2 と ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を $T(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(2) k，b をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) $S(a)$，$T(a)$ をそれぞれ a を用いて表せ．

(4) a が条件 $a > b > 0$ を満たすように動くとき，$S(a) + T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(1) $y' = 2x$ より，$\ell : y = 2a(x-a) + a^2$

$\therefore$ $\underline{\ell : y = 2ax - a^2}$ //

(2) C_2 において，$y' = -2x + 4$

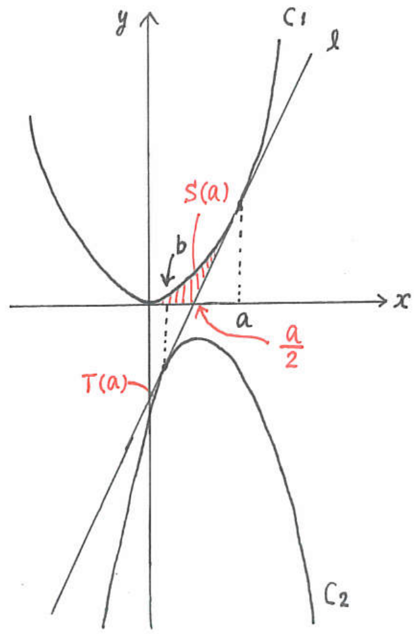
$\therefore$ 点Qでの接線は $y = (-2b+4)(x-b) - b^2 + 4b + k$

$\therefore$ $y = 2(-b+2)x + b^2 + k$

これが ℓ となるから，(1) と係数を比べて，$a = -b+2$ かつ $-a^2 = b^2 + k$

よって，$\underline{b = -a+2,\ k = -2a^2+4a-4}$ //

(3) 右図より



$$S(a) = \int_0^a x^2\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \frac{1}{4}a^3$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{1}{4}a^3$$

$$= \underline{\frac{a^3}{12}}\ //$$

$$T(a) = \int_0^{-a+2} 2ax - a^2 - (-x^2+4x-2a^2+4a-4)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\{x+(a-2)\}^3\right]_0^{-a+2}$$

$$= \underline{-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}}\ //$$

(別) $\frac{1}{3}(2-a)^3$ などでも正解

2016年 教育学部（その他） 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

3 kを実数として2つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = -x^2 + 4x + k$$

を考える．点$\mathrm{P}(a,\ a^2)$におけるC_1の接線をℓとする．C_2はℓに点Qで接するとして，点Qのx座標をbとする．不等式$a > b > 0$が成り立つとする．C_1とℓおよびx軸で囲まれた図形の面積を$S(a)$とし，C_2とℓおよびy軸で囲まれた図形の面積を$T(a)$とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓの方程式をaを用いて表せ．
(2) k，bをそれぞれaを用いて表せ．
(3) $S(a)$，$T(a)$をそれぞれaを用いて表せ．
(4) aが条件$a > b > 0$を満たすように動くとき，$S(a) + T(a)$の最小値とそのときのaの値を求めよ．

(4) $b = -a + 2$ より

$$a > b > 0 \iff a > -a + 2 > 0$$
$$\iff 1 < a < 2$$

$f(a) = S(a) + T(a)$ とおくと，

$$f(a) = -\frac{1}{4}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}$$

$$f'(a) = -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4$$
$$= -\frac{1}{4}(3a-4)(a-4)$$

a	(1)	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{64}{27} + 2\cdot\frac{16}{9} - 4\cdot\frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$
$$= \frac{8}{27}$$

∴ 最小値 $\frac{8}{27}$ $\left(a = \frac{4}{3} \text{ のとき}\right)$ //