

2012年 第3問

3  $a$  を正の定数とし、次のように定められた2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える.

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{4}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ.

- (1)  $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ.
- (2)  $b_{n+1}$  を  $a_n$  を用いて表せ. さらに,  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ.
- (3)  $b_3, b_4$  をそれぞれ  $b_1$  を用いて表せ. さらに, 数列  $\{b_n\}$  の一般項  $b_n$  を  $n$  と  $b_1$  を用いて表せ.
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  を  $n$  と  $b_1$  を用いて表せ.
- (5) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.