0001823546718999

宮崎大学

2014 年 工学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 曲線 $C_1 : y = \cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の点 $(t,\ \cos t)\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における曲線 C_1 の接線を ℓ とする．また，2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ と接線 ℓ との交点をそれぞれ A，B とし，放物線 $C_2 : y = -\dfrac{x^2}{2} + ax + c$ が 2 点 A，B を通るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

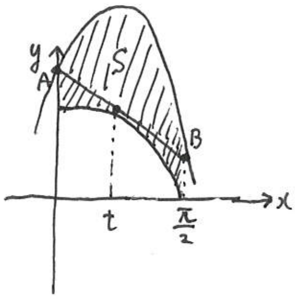
(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と 2 直線 $x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S とする．S を，a と c を用いて表せ．

(3) (2) の S が最小となる t の値を求めよ．

(1) $y' = -\sin x$ より．$\ell : y = -(\sin t)\cdot(x - t) + \cos t$ $\quad \therefore \ell : \underline{y = -(\sin t)\cdot x + t\sin t + \cos t}$ //

(2) $A(0,\ t\sin t + \cos t)$，$B\left(\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}\sin t + t\sin t + \cos t\right)$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{x^2}{2} + ax + c - \cos x \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{a}{2}x^2 + cx - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{-\frac{\pi^3}{48} + \frac{a\pi^2}{8} + \frac{c\pi}{2} - 1} \ //$$

(3) C_2 が A を通ることより，$t\sin t + \cos t = c \ \cdots ①$

〃 B 〃 $\quad -\dfrac{\pi}{2}\sin t + t\sin t + \cos t = -\dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi a}{2} + c \ \cdots ②$

②に①を代入して，$-\dfrac{\pi}{2}\sin t = -\dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi}{2}a \quad \therefore a = \dfrac{\pi}{4} - \sin t \ \cdots ③$

(2) より．$S(t) = -\dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi^2}{8}\left(\dfrac{\pi}{4} - \sin t\right) + \dfrac{\pi}{2}(t\sin t + \cos t) - 1$

$$= \frac{\pi^3}{96} - \frac{\pi^2}{8}\sin t + \frac{\pi}{2}\cdot t\sin t + \frac{\pi}{2}\cos t - 1$$

$\therefore S'(t) = \dfrac{\pi}{8}(4t - \pi)\cos t$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘		↗	

∴右の増減表より

S は $\underline{t = \dfrac{\pi}{4}}$ // のとき最小となる