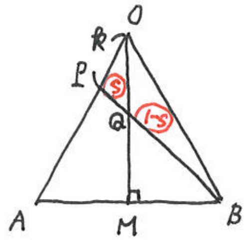
福岡大学

2012年 工・薬学部 第5問

$\boxed{5}$ 一辺の長さが1の正三角形OABがある．辺ABの中点をMとする．辺OA上に点Pをとり，線分OMと線分BPとの交点をQとする．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$k=|\overrightarrow{OP}|$とおく．$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$k$で表すと，$\overrightarrow{OQ}=\boxed{}$である．また，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$となるとき，$k$の値は$\boxed{}$である．



O，Q，Mは一直線上にあるので，

$\overrightarrow{OQ}=m\overrightarrow{OM}$ と表すことができる．

$\therefore \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}m\vec{a}+\frac{1}{2}m\vec{b}$ …①

P，Q，Bは一直線上にあるので，PQ：QB $= s:1-s$ $(0<s<1)$とおくと

$\overrightarrow{OQ}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}$ より．$\overrightarrow{OQ}=(1-s)k\vec{a}+s\vec{b}$ …②

$\vec{a}$と$\vec{b}$は一次独立より．①，②から
$$\begin{cases}\frac{1}{2}m=(1-s)k\\ \frac{1}{2}m=s\end{cases}$$

$\therefore \frac{1}{2}m=\left(1-\frac{1}{2}m\right)k \qquad \therefore m=\frac{2k}{1+k}$

①に代入して．$\underline{\overrightarrow{OQ}=\frac{k}{1+k}\vec{a}+\frac{k}{1+k}\vec{b}}$ //

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left(\frac{k}{1+k}\right)^2(\underbrace{|\vec{a}|^2}_{=1}+\underbrace{|\vec{b}|^2}_{=1}+2\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}})$$

$$=\left(\frac{k}{1+k}\right)^2\times3$$

$\therefore |\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{3}\cdot\frac{k}{1+k}$，$|\overrightarrow{OP}|=k$ より

$$\frac{\sqrt{3}k}{1+k}=k \qquad k\neq0 \text{ より } 1+k=\sqrt{3}$$

$\therefore \underline{k=\sqrt{3}-1}$ //