東京学芸大学

2013年 第4問

数理 石井K

4 $x \geqq 0$ において連続関数 $f(x)$ が不等式

$$f(x) \leqq a + \int_0^x 2tf(t)\,dt$$

をみたしているとする．$g(x) = ae^{x^2}$ とするとき，下の問いに答えよ．ただし，a は0以上の定数である．

(1) 等式 $g(x) = a + \int_0^x 2tg(t)\,dt$ を示せ．

(2) $h(x) = e^{-x^2}\int_0^x 2tf(t)\,dt$ とするとき，$x > 0$ において不等式 $h'(x) \leqq 2axe^{-x^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ において不等式 $f(x) \leqq g(x)$ が成り立つことを示せ．

(1) $a+\int_0^x 2tg(t)\,dt = a+\int_0^x 2ate^{t^2}dt$

$= a+\left[ae^{t^2}\right]_0^x$

$= ae^{x^2}$

$= g(x)$ ▨

(2) $h'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x 2tf(t)\,dt + e^{-x^2}\cdot 2xf(x)$

$\therefore\ 2axe^{-x^2} - h'(x) = 2xe^{-x^2}\left\{a+\int_0^x 2tf(t)\,dt - f(x)\right\}$

ここで，$x>0$ と $f(x) \leqq a+\int_0^x 2tf(t)\,dt \iff a+\int_0^x 2tf(t)\,dt - f(x) \geqq 0$ より

$2axe^{-x^2} - h'(x) \geqq 0$ すなわち $h'(x) \leqq 2axe^{-x^2}$ が成り立つ ▨

(3) $h'(0) = 0$ より．$x=0$ のときも(2)の不等式は成り立つ

$\therefore\ \int_0^x h'(t)\,dt \leqq \int_0^x 2ate^{-t^2}dt \iff h(x)-h(0) \leqq \left[-ae^{-t^2}\right]_0^x$

$\iff h(x) \leqq a - ae^{-x^2}$

$\iff e^{-x^2}\int_0^x 2tf(t)\,dt \leqq a(1-e^{-x^2})$

$\iff \int_0^x 2tf(t)\,dt \leqq ae^{x^2} - a$

$\therefore\ g(x) - f(x) \geqq ae^{x} - a - \int_0^x 2tf(t)\,dt \geqq 0$ $\therefore\ f(x) \leqq g(x)$ が成り立つ ▨