0001980369108999

九州大学

2015年 文系 第2問

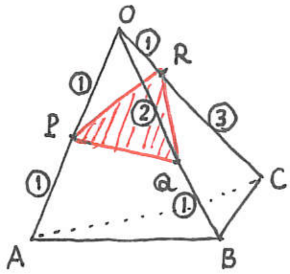
数理 石井K

2 1辺の長さが1である正四面体OABCを考える．辺OAの中点をP，辺OBを2：1に内分する点をQ，辺OCを1：3に内分する点をRとする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分PQの長さと線分PRの長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$の内積$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$を求めよ．

(3) 三角形PQRの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ より．

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ ···①

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ ···②

ここで，OABCは1辺の長さが1の正四面体より，

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}$

よって，①より．$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}|\overrightarrow{OB}|^2=\frac{13}{36}$ $\therefore |\overrightarrow{PQ}|=\frac{\sqrt{13}}{6}$ //

②より，$|\overrightarrow{PR}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{16}|\overrightarrow{OC}|^2=\frac{3}{16}$ $\therefore |\overrightarrow{PR}|=\frac{\sqrt{3}}{4}$ //

(2) ①と②より．

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{5}{48}$$ //

(3) $$\triangle PQR=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\cdot\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{131}}{96}$$ //