

2014年 医学部 第4問


 数理  
石井K

4  $a, b$  は 1 と異なる正の実数で,  $ab \neq 1, \frac{a}{b} \neq 1$  を満たすものとする.

不等式  $\log_{ab} a < \log_{\frac{a}{b}} ab$  ……①

について, 以下の問いに答えなさい.

(1)  $X = \log_a b$  とおくと, ① を  $X$  についての不等式で表すと,

$$\frac{\boxed{1}}{(1+X)(1-X)} < 0$$

となる.  $\boxed{1}$  にあてはまる適切な式を求めなさい.

(2) 不等式 ① を満たす点  $(a, b)$  の存在する領域を, 座標平面上に図示しなさい.

(1) 底の変換公式より, ①  $\Leftrightarrow \frac{\log_a a}{\log_a ab} < \frac{\log_a ab}{\log_a \frac{a}{b}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b + 1} < \frac{\log_a b + 1}{1 - \log_a b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{1-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x(x+3)}{(1+x)(1-x)} < 0 \quad \left( \Leftrightarrow \frac{x^2+3x}{(x+1)(x-1)} < 0 \right)$$

(2)

(1)より,  $x^2+3x > 0, (x+1)(x-1) < 0$  または,  $x^2+3x < 0, (x+1)(x-1) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[ (x > 0 \text{ または } x < -3), -1 < x < 1 \right] \text{ または, } \left[ -3 < x < 0, (x > 1 \text{ または } x < -1) \right]$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ または, } -3 < x < -1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_a b < 1 \text{ または } -3 < \log_a b < -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot 0 < a < 1 \text{ のとき, } a < b < 1 \text{ または } \frac{1}{a} < b < \frac{1}{a^3} \\ \cdot a > 1 \text{ のとき, } 1 < b < a \text{ または } \frac{1}{a^3} < b < \frac{1}{a} \end{cases}$$

∴ 右のグラフになる (境界線は含まない).

