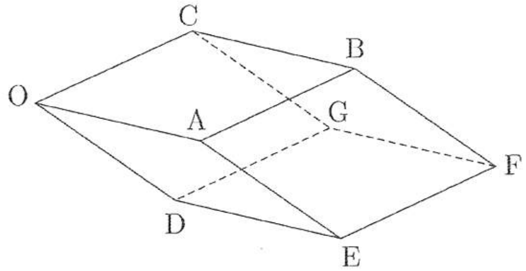
宮崎大学

2014年 教育文化（理系）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 下図の平行六面体において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ とし，△ACD と線分 OF の交点を H とする．さらに，四面体 OACD が1辺の長さ1の正四面体であるとする．このとき，次の各問に答えよ．



(1) △ACD の重心が点 H に一致することを示し，2つの線分 OH と HF の比 OH : HF を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HF}$ の値を求めよ．

(3) △HEF の面積を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}$ であるから，H は $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OF}$ と表される．

また，H は △ACD 上にあるので，$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}+k\vec{c}+k\vec{d}$ であることから，

$3k=1$ ∴ $k=\frac{1}{3}$ となり，$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$ となり H は △ACD の重心 ▨

$OH:OF=k:1=1:3$ より $\underline{OH:HF=1:2}$ //

(2) $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$

$\overrightarrow{HF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$

$\therefore \overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HF}=\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)$

$=\underline{\frac{4}{3}}$ //

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$
$|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=1$ を使って計算する．

(3) $|\overrightarrow{HE}|^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=1$ ∴ $|\overrightarrow{HE}|=1$

$|\overrightarrow{HF}|^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{3}$ ∴ $|\overrightarrow{HF}|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

∴ $\overrightarrow{HE}$ と $\overrightarrow{HF}$ のなす角を θ とおくと，$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HF}}{|\overrightarrow{HE}||\overrightarrow{HF}|}=\frac{\frac{4}{3}}{1\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

∴ $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $\triangle HEF=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{HE}||\overrightarrow{HF}|\cdot\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ //