

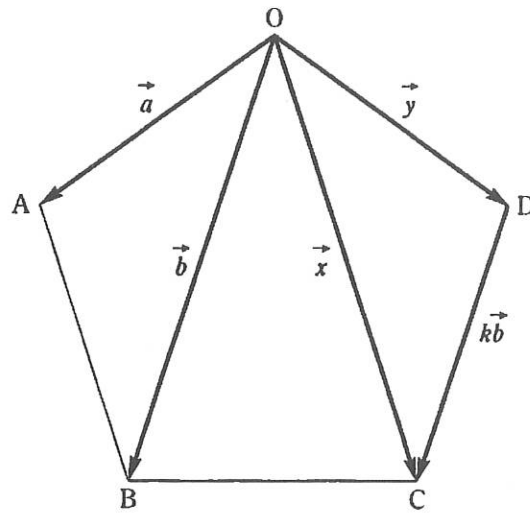
2016年 医学部 第2問

1枚目 / 2

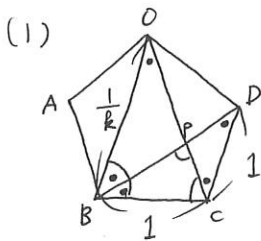
2 一辺の長さ1の正五角形OABCDについて、OBとDCは平行である。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{x}, \vec{OD} = \vec{y}, \vec{DC} = k\vec{b}$ (k は実数)

とすとき、次の各問に答えよ。



- (1) k の値を求め、 \vec{x}, \vec{y} を、 \vec{a} と \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
- (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とすとき、 $\cos\theta$ の値を求めよ。
- (3) \vec{a} と \vec{x} の内積を求めよ。



左図において、

$BC = CD = 1$

$OB = OC = \frac{1}{k}$

$OP : PC = \frac{1}{k} : 1$ より、

$PC = \frac{1}{k} \times \frac{k}{1+k} = \frac{1}{1+k}$

相似な三角形 $\triangle OBC \sim \triangle BCP$ において、

$OB : BC = BC : CP$

$\frac{1}{k} : 1 = 1 : \frac{1}{1+k}$

$\frac{1}{k(1+k)} = 1$

$k^2 + k - 1 = 0$

$k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$k > 0$ より、 $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ #

$\vec{x} = \frac{1}{k} \vec{AB}$

$= \frac{2}{\sqrt{5} - 1} (-\vec{a} + \vec{b})$

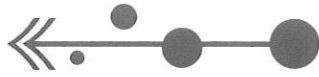
$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} (\vec{a} - \vec{b})$ #

$\vec{y} = k \vec{AC}$

$= k (\vec{x} - \vec{a})$

$= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \vec{b} - \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \vec{a} \right)$

$= -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \vec{a} + \vec{b}$ #



2016年 医学部 第2問

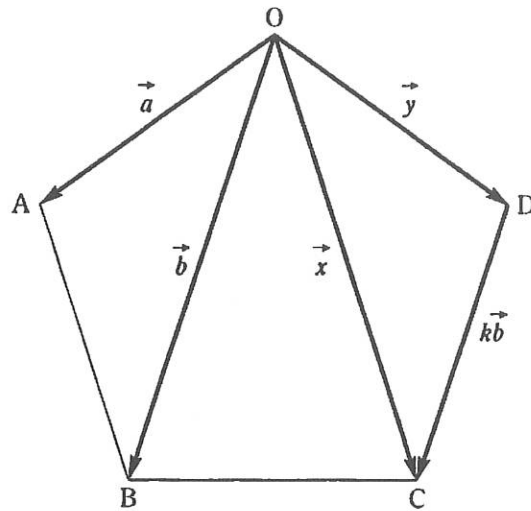
2枚目 / 2

増田

2 一辺の長さ1の正五角形OABCDについて、OBとDCは平行である。

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OC} = \vec{x}, \quad \vec{OD} = \vec{y}, \quad \vec{DC} = k\vec{b} \quad (k \text{ は実数})$$

とするとき、次の各問に答えよ。



- (1) k の値を求め、 \vec{x} 、 \vec{y} を、 \vec{a} と \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
 (2) \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とするとき、 $\cos\theta$ の値を求めよ。
 (3) \vec{a} と \vec{x} の内積を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ において余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - AB^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| = AB = 1, \quad |\vec{b}| = \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

を代入

$$\cos\theta = \frac{1 + |\vec{b}|^2 - 1}{2 \times 1 \times |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(3) $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = p$ とおく。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x} &= \vec{a} \cdot \{-p(\vec{a} - \vec{b})\} \\ &= -p|\vec{a}|^2 + p\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -p + p|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= -p + p \times 1 \times p \times \frac{p}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p}{2}(p^2 - 2) \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 - 2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$