

2015年工（電気電子工，建築）第2問

 数理
石井

2 次の問に答えよ。

- (1) a を定数とする。放物線 $y = ax^2$ と曲線 $y = \log x$ がただ1つの共有点 P をもち、点 P で共通の接線をもつ。 a の値と点 P の座標を求めよ。ただし、 \log は自然対数とする。
- (2) a, b を定数とし、 $f(x) = ax^2 + (b-a)x - b$ とする。 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, $f(2) = 5$ が成り立つとき、 a, b の値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x^2-1} dx$ の値を求めよ。

(1) $f(x) = ax^2$, $g(x) = \log x$ とおくと、点 P の x 座標 α は、

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \text{ をみたす。}$$

$$\text{よって、} \alpha^2 = \log \alpha \quad \text{かつ} \quad 2a\alpha = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 2a\alpha^2 = 2 \log \alpha \quad \text{かつ} \quad 2a\alpha^2 = 1$$

$$\therefore \log \alpha = \frac{1}{2} \text{ より、} \alpha = \sqrt{e} \quad \text{このとき、} \underline{a = \frac{1}{2e}} \quad \underline{P(\sqrt{e}, \frac{1}{2})} //$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= ax^2 - ax + bx - b \\ &= a(x-1)x + b(x-1) \\ &= (x-1)(ax+b) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+b)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} ax+b = a+b$$

$$\therefore a+b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 5 \text{ より、} \quad 2a+b = 5 \quad \dots \textcircled{2} \quad \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} \underline{a = 4, b = -3} //$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x+1)x+1}{x+1} dx$$

$$= \int_2^3 x + \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \log(x+1) \right]_2^3$$

$$= \frac{9}{2} + \log 4 - 2 - \log 3$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{2} + 2 \log 2 - \log 3}} //$$