名古屋市立大学

2016年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 自然数 k に対して，関数 $f_k(x) = -3x^2 - 2x + a_k$ を考える．ただし，a_k は x に無関係な数列で $a_1 = 2$ とする．関係式 $\int_0^{k+1} f_{k+1}(x)\,dx = \int_0^k f_k(x)\,dx - k^2 - k$ が満たされるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_k と a_{k+1} との関係式を求めよ．

(2) a_k を k の式で表せ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} \int_0^k f_k(x)\,dx$ を求めよ．

(1) $\int_0^{k+1} f_{k+1}(x)\,dx = \left[-x^3 - x^2 + a_{k+1}x\right]_0^{k+1}$

$= -(k+1)^3 - (k+1)^2 + a_{k+1}(k+1)$

$= -k^3 - 4k^2 - 5k - 2 + (k+1)a_{k+1}$ …①

また，

$\int_0^k f_k(x)\,dx - k^2 - k = \left[-x^3 - x^2 + a_k x\right]_0^k - k^2 - k$

$= -k^3 - k^2 + a_k \cdot k - k^2 - k$

$= -k^3 - 2k^2 - k + k \cdot a_k$ …②

①，②を関係式に代入して整理すると，$\underline{(k+1)a_{k+1} - k a_k = 2(k+1)^2}$ //

(2) $b_k = k a_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とおくと，$b_{k+1} - b_k = 2(k+1)^2$

∴ $k \geqq 2$ のとき，$b_k = b_1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2(i+1)^2$

$= 2 + \sum_{i=2}^{k} 2i^2$

$= \frac{1}{3}k(k+1)(2k+1)$ これは $k=1$ のときも成り立つ

∴ $\underline{a_k = \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)}$ //

(3) $c_k = \int_0^k f_k(x)\,dx$ とおくと関係式より，$c_{k+1} - c_k = -k^2 - k$

∴ $k \geqq 2$ のとき，$c_k = c_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-k^2 - k)$ ①より，$c_1 = 0$ ∴ $c_k = -\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$

これは $k=1$ のときも成り立つ

∴ $\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-2)(k-1)k(k+1) - (k-1)k(k+1)(k+2)\right\} = \underline{-\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(n+2)}$ //

この変形を使わず $\sum k^3$ の公式で解いてもよい