

2010年 人間科学学部（文系）第5問

5 四面体  $OABC$  において、線分  $OA$  を  $2:1$  に内分する点を  $P$ 、線分  $OB$  を  $3:1$  に内分する点を  $Q$ 、線分  $BC$  を  $4:1$  に内分する点を  $R$  とする。この四面体を  $3$  点  $P, Q, R$  を通る平面で切り、この平面が線分  $AC$  と交わる点を  $S$  とするとき、線分の長さの比  $AS:SC$  を求めることを考えよう。

点  $S$  は  $3$  点  $P, Q, R$  を通る平面上にあるから、定数  $s, t, u$  を用いて、

$$\vec{OS} = s\vec{OP} + t\vec{OQ} + u\vec{OR} \quad (s + t + u = 1)$$

と書くことができる。ここで、 $\vec{OR} = \frac{\boxed{\text{ス}}\vec{OB} + \boxed{\text{セ}}\vec{OC}}{\boxed{\text{ソ}}}$  であるから、 $\vec{OS}$  は  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  それぞれの定数倍の和として表すことができる。そこで、 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  の係数をそれぞれ定数  $s', t', u'$  とおくことにより

$$\vec{OS} = s'\vec{OA} + t'\vec{OB} + u'\vec{OC} \quad (18s' + 16t' + 11u' = \boxed{\text{タ}})$$

と書くことができる。ところが、点  $S$  は線分  $AC$  上にあることから、 $s', t', u'$  を求めることができ、 $AS:SC = \boxed{\text{チ}} : \boxed{\text{ツ}}$  であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}}$  はできる限り小さい自然数で答えること。