島根大学

2012年 医学部 第4問

1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, bを定数とし，$a \neq 0$とする．連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x+(a-1)y=b & \cdots① \\ ax+a^2y=1 & \cdots② \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) (*)が2組以上の解をもつようなaとbの値を求めよ．

(2) (*)が$x=1$, $y=2$をただ1組の解としてもつようなaとbの値を求めよ．

(3) (*)が$x=y$となる解をもつためのaとbに関する必要十分条件を求めよ．

ポイント

例えば，連立方程式

$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$ ← 無数の解をもつ　　$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ ← 解なし

(1) ①×a より $2a+a(a-1)y=ab$ $\cdots③$

②×2 より $2a+2a^2y=2$ $\cdots④$

④−③より $(a^2+a)y=2-ab$ よって $a(a+1)y=2-ab$

(i) $a \neq -1$ のとき 両辺を $a(a+1)$ でわって $y=\dfrac{2-ab}{a(a+1)}$

これを①に代入するとxの値が求まる．このとき解は1組なので不適

(ii) $a=-1$のとき，$\begin{cases} 2x-2y=b \\ -x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\frac{1}{2}b \\ x-y=-1 \end{cases}$

$b \neq -2$であれば解なし，$b=-2$であれば無数の解をもつ

(i), (ii) より，$\underline{(a, b)=(-1, -2)}$ //

(2) ①と②に $x=1$, $y=2$ を代入して $\begin{cases} 2+2a-2=b \\ a+2a^2=1 \end{cases}$

$\therefore \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ (2a-1)(a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ a=\frac{1}{2}, -1 \end{cases}$

(1)より $(a, b)=(-1, -2)$ は2組以上の解をもち不適

$\therefore \underline{(a, b)=\left(\frac{1}{2}, 1\right)}$ //

0000056145834999

島根大学

2012年 医学部 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, bを定数とし，$a \neq 0$とする．連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y = b \\ ax + a^2 y = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $(*)$が2組以上の解をもつようなaとbの値を求めよ．

(2) $(*)$が$x=1$, $y=2$をただ1組の解としてもつようなaとbの値を求めよ．

(3) $(*)$が$x=y$となる解をもつためのaとbに関する必要十分条件を求めよ．

(3) $x=y$を$(*)$に代入して

$$\begin{cases} x + ax = b & \cdots ⑤ \\ (a^2+a)x = 1 & \cdots ⑥ \end{cases} \overset{⑤\times a}{\iff} \begin{cases} a(a+1)x = ab \\ a(a+1)x = 1 \end{cases}$$

よって解をもつには $ab=1$

ただし (1)より $a=-1$, $b=-1$の場合は解なしなので

$ab=1$ かつ $a \neq -1$

逆に，このとき．(1)より $y = \dfrac{1}{a(a+1)}$ となり

これを①に代入すると． $2x + \dfrac{a-1}{a(a+1)} = b$

$\therefore 2x = \dfrac{1}{a} - \dfrac{a-1}{a(a+1)}$ 　　$\therefore x = \dfrac{1}{a(a+1)}$

$\therefore x = y$となる

よって求める条件は $\underline{ab=1 \text{ かつ } a \neq -1}$