2014年 医学部 第3問

やや難. 数理 石井K

$\boxed{3}$ xy 平面上の点Pの x 座標，y 座標をそれぞれ P_x，P_y と書く．P_x，P_y がともに整数であるような点Pを格子点という．次の問に答えよ．

(1) 原点Oと点A(18, 12)を結ぶ線分OAがある．線分OA上にある格子点の個数を求めよ．ただし両端O，Aも線分OA上の点とする．

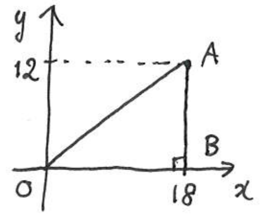
(2) O，Aと点B(18, 0)を頂点とする△OABの周または内部にある格子点の個数を求めよ．

(3) n を正の整数とする．2点C(n, 0)，D(0, n)を考える．格子点Pが△OCDの周または内部を動くとき P_x の総和を m_1 とおく．また $|P_x - P_y|$ の総和を n が偶数のとき m_2，n が奇数のとき m_3 とする．m_1，m_2，m_3 を n の式で表せ．ただし解答は an^3+bn^2+cn+d のように n の次数について整理し，降べきの順（次数の高い順）に書くこと．

(1) 直線OAを式で表すと $y=\frac{2}{3}x$ ∴ x が3の倍数のとき y は整数

∴ (0, 0), (3, 2), (6, 4), (9, 6), (12, 8), (15, 10), (18, 12) の 7個

(2) C(0, 12)とすると長方形OBAC上(周を含む)には格子点が $13\times19=247$ 個あり．

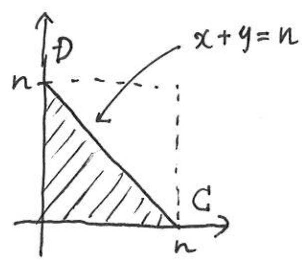


OA上には7個あるから△OABの内部(周を除く)には $\frac{247-7}{2}=120$ 個 格子点がある ∴ $120+7=127$ 個

(3) $m_1=\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots+k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)$

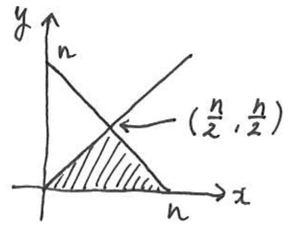
$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$

$=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n$



● n が偶数のとき．

$y=k$ の右図の斜線部分の格子点は．$(k, k)\sim(n-k, k)$



∴ $P_x-P_y=0, 1, \cdots, n-2k$

∴ $m_2=2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 1+2+\cdots+(n-2k)$

$=2\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)-\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n^2(n+1)}{4}+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n$

● n が奇数のとき．

$m_3=2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 1+2+\cdots+(n-2k)=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n+\frac{1}{4}$